可換不足群をもち惰性剰余群が基本可換2-群の主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて(群論と組合せ数学)

宇佐美, 陽子

数理解析研究所講究録
991巻 1997年 36-43

可換不足群をもち惰性剰余群が基本可換2-群の主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて

お茶の水女子大学(理) 宇佐美陽子
(Yoko Usami)

§1 序

本講演は、1995年7月東京大学駒場キャンパスで行なわれた第12回代数的組合せ論シンポジウムでの私の講演、"可換不足群をもち惰性剰余群が位数8の2面体群である主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて"に続くものである。従ってその時の報告集[U3]にこの問題の背景は既に書いてある。つまり、この問題が、derived category equivalence に関する Broué 予想[B]から生じたものであることや、Alperin の weight 予想、Dade予想とも深く関連すること、及び、この問題に関し、既に知られている事などは、そこで記述済みであり、重複を避ける為、今回はそれらは省略し、その続きとして読んでもらえればと思って書くこととする。([U3] §2, §4 参照。今回のシンポジウムの Jianbei An 氏の講演とも関連があるので

その講演録の方で、文献は、詳しく述べられることと思われる。Dade 予想との関連を示す命題の証明は、Watanabe の手法によるものを [U4] 2. 3(命題1.7)に載せてある。)そこで、ここでは、最小限の定義と定理、証明のスケッチ、及び、最近、学生と計算した新しい結果について、記述するにとどめたい。

はじめに、$\mathcal{O}$は、完備離散付値環で、商体が標数零の K，$\mathcal{O}$を極大 ideal で割った剰余類の体が標数 $p > 0$ の k になるものとする。K，kは、考える群に対し充分大きいとしておく。(共通の defect group (不足群) P を持つ p-block 達を、一般に考えるに当たっては、kは代数的閉体、Kは、1の $|P|$-乗根を含むと仮定しておくとよい。)

さて、Broué は、2つの block の一般指標の間の“きれいな” bijective isometry として、perfect isometry なる概念(つまり、それを誘導することで、各々の blockに属す $\mathcal{O}$-valued class function 達の間の bijection が得られるだけでなく、更には、各々の block に属す K-valued class function で p-singular class 上では零となるもの達の間の bijection をも誘導できるもの)を導入した。ここで、Broué予想に依れば、有限群Gで abelian defect group P を持つ p-block b については、bと、$N_G(P)$に

おけるそのBrauer 対応子 $Br_P(b)$ との間には、perfect isometry が存在するのみならず、isotypic (local な群論的条件のついた perfect isometry の族が存在する) であろうということになる。本稿は、以下の定理を報告するものである。

<u>定理</u> b は、abelian defect group P を持つ principal block (主ブロック) で、inertial quotient (惰性剰余群) E が elementary abelian 2-group であり、$p \neq 2, 3$ とする。この時、b と $Br_P(b)$ は isotypic となる。(ただし、ここで inertial quotient E とは、b の $C_G(P)$ での root を e とした時、$E = N_G(P, e) / PC_G(P)$ と定義されるものである。)

<u>注意</u> $E = 1$ も考慮して、$p \neq 2$ としたが、$p = 2$ の場合は、[FH] で済んではいる。

§2 isotypy

詳しい用語解説は、[U3] §3 を見てもらうことにして、定義 ([B] §4 の"良い"方の定義) のみを書く。

<u>定義</u> b は、有限群 G の block, b' は、有限群 G' の block とし、P は、両方に共通した defect group

とする。次の2条件の成り立つ時、bとb'は isotypic といい、perfect isometry $I^{(1)}$をb'とbの間の isotypy と呼ぶ。

(i) PのG'及びGへの包含は、Brauer category $\mathrm{Br}_{\hat{b}' P}(G')$と$\mathrm{Br}_{\hat{b} P}(G)$の間の equivalence を誘導する。

(ii) QをPの任意の subgroup とする。Gでのb-subpair (Q, b_Q)とG'でのb'-subpair (Q, b'_Q)に対し、$C_{G'}(Q)$の block b'_Qに属す一般指標と$C_G(Q)$の block b_Qに属す一般指標の間に perfect isometry I^Qが存在し、それは次の条件をみたしている。任意の$z \in C_P(Q)$に対し

$$d_{C_G(Q)}^{(z, b_{Q\langle z\rangle})} \circ I^Q = I_{p'}^{Q\langle z\rangle} \circ d_{C_{G'}(Q)}^{(z, b'_{Q\langle z\rangle})}$$

ここで、$I_{p'}^{Q\langle z\rangle}$とは、$I^{Q\langle z\rangle}$から各々の$p$-singular class 上零となる$K$-valued class function 間に誘導された bijection とし、$d_{C_G(Q)}^{(z, b_{Q\langle z\rangle})}$は$b$-element $(z, b_{Q\langle z\rangle})$に関する decomposition map とする。

<u>注意</u>　P abelian group であれば、Gの block bと$N_G(P)$での Brauer 対応子 $\mathrm{Br}_P(b)$の間で論じる

場合、(i)は、自明に成り立っている。bがprincipal block の時は、b_Q達も全てprincipal block となる。

§3 定理の証明のスケッチ

principal blockに限った理由は、[U3]§5にも書いているが、そのほか、bの中及び、任意のb-subpair (Q, b_Q)のb_Qの中に、trivial character という値の全てわかっている"切札"を持っており、その値を使って、幾つかの場合を起こり得ぬとして簡単に除去できるということもある。

さて、簡単に証明をスケッチしてみる。Külshammer[K]により、bがprincipal blockでは、$Br_P(b)$が$L = P \rtimes E$ (のprincipal block —Lはprincipal blockのみよりなる。)と森田同値故、Lとbがisotypicを言う。[PU]にあるPuig-Usamiの手法に則ることにすると、荒っぽく言って、次の3点を検証すればよい。

(1) $C_E(Q) \subsetneqq E$をみたす任意のp-subgroup $Q (\subseteqq P)$に対し、$C_L(Q)$と$C_G(Q)$のblock b_Qの間のperfect isometry I^Qが$N_E(Q)$-stableか

(2) 全体として、整合性のある$\{I^Q \mid Q \subseteqq P\}$が

揃えられそうか

(3) $C_p(E)=1$ の条件下、$\mathcal{S}=\{p'$-class 上零となる L の一般指標$\}$と $\mathcal{J}=\{p'$-class 上零となる $\mathcal{b}$ の一般指標$\}$の間に bijective isometry の存在を仮定した時、これを拡張した L と $\mathcal{b}$ の一般指標の間の bijective isometry が存在するか

ちなみに、(1)の検証は易しく、(2)の検証には、$\mathcal{b}$ が principal block であることを使う([U3] §5 参照)が、(3)の検証には、principal block であることは使わず、次の§4の言い方で、ねじれ型でない(分裂型)ならよい。さて、(3)の検証には、$\mathcal{S}$ の $\mathbb{Z}$-basis が必要となる。E の指標は、L の指標とも自然にみなすことにして、それ以外の L の既約指標 μ は、P に制限すると、P のある1次指標 θ の属す E-orbit を定めるので、その θ の E での stabilizer を F_μ とおくことにする。μ を F_μ に制限すると、F_μ のある一次指標 ξ_μ の multiple となり、

$$\{\mu - \mathrm{Ind}_{F_\mu}^{E}\,\xi_\mu\} \subset \mathcal{S} \quad \cdots\cdots (3.1)$$

達が、$\mathcal{S}$ の $\mathbb{Z}$-basis となる。ただし、ここで $\mathrm{Ind}_{F_\mu}^{E}\,\xi_\mu$ は、ξ_μ を E へ持ち上げた指標とする。今 F_μ が E の maximal subgroup であれば、

$$(\mu - \mathrm{Ind}_{F_\mu}^{E}\,\xi_\mu,\ \mu - \mathrm{Ind}_{F_\mu}^{E}\,\xi_\mu)_L = 3 \quad \cdots\cdots (3.2)$$

となり、このように自身との内積が3となる(小さい!)ものが、(3.1)内 に多くある事を証明できる事が、重要なポイントとなる。なぜなら(3.1)をみたすもの達の間の内積は、$\mathcal{I}$に写されても、保たれるので、それらの像は、±(既約指標)3個の和であって互いの間の内積を比較してゆくと、±(既約指標)達への分解の仕方が唯一通りに決まるからである。($p=3$ では、唯一通りかの検証に、たくさんの例外ケースのチェックが必要となってしまう。) (3.1)なる$\mathcal{S}$の$\mathbb{Z}$-basisの中で、自身との内積が3より大きいものが、$\mathcal{I}$に写された先での±(既約指標)達への分解の仕方は、既に決まった分との内積の比較から、容易に決まってしまう。

§4 小さいEについて追加結果

bがprincipal blockと限らぬ時は、Külshammer [K]によれば、$Br_P(b)$は、Lのk上のあるtwisted group algebra $k_*\hat{L}$と森田同値となる。 $k_*\hat{L}$が分裂せぬ時、便宜上、ねじれ型と呼ぶことにする。小さいEについての学生達との結果を、追加したい。次の各ケースでbと$Br_P(b)$はisotypicとなる。Pはむろん全てabelianとする。

(i) (Naomi) $E \cong A_4$ (4次交代群)

(ii) (Kushita) b principal block $E \cong D_{10}$ (位数10の

2面体群） $p \neq 3$

(iii)（Ishibashi） b ねじれ型, $E \triangleq Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ $p \neq 3$

(iv)（Kushita） b ねじれ型, $E \triangleq Z_3 \times Z_3 \times Z_3$ $p \neq 2, 7$

(v)（Sugimoto） b ねじれ型, $E \triangleq (Z_3 \times Z_3) \rtimes Z_2$ 位数2

の元は、$Z_3 \times Z_3$ の各元を逆元にする作用, $p \neq 5, 7$

REFERENCES

[B] M. BROUÉ, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque 181-182 (1990), 61-92.

[FH] P. FONG and M. HARRIS, On perfect isometries and isotypies in finite groups, Invent. Math. 114 (1993), 139-191.

[K] B. KÜLSHAMMER, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm. Algebra 13 (1985), 147-168.

[PU] L. PUIG and Y. USAMI, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, J.Algebra 160 (1993) 192-225.

[U1] Y. USAMI, Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $Z_4 \times Z_2$, J.Algebra 181 (1996), 727-759.

[U2] Y. USAMI, Perfect isometries and isotypies for blocks with abelian defect groups and the inertial quotients isomorphic to $Z_3 \times Z_3$, J.Algebra, 182 (1996), 140-164.

[U3] 宇佐美陽子, 可換不足群を持ち惰性剰余群が位数8の2面体群である主ブロックのパーフェクトアイソメトリーについて,（第12回代数的組合せ論シンポジウム報告集150-169）

[U4] Y. USAMI, Perfect isometries for principal blocks with abelian defect groups and elementary abèlian 2-inertial quotients, submitted to J.Algebra .